

Ομάδες Μεταθέσεων

$(S_n, \circ)$: η n -οστή συγγενική ομάδα: Η ομάδα μεταθέσεων επί του $\{1, 2, \dots, n\}$, όπου η πράξη είναι η σύνθεση απεικονίσεων

Τότε $|S_n| = n!$ και η S_n : αβελιανή $\Leftrightarrow n=1$ ή $n=2$

Αν $\sigma \in S_n$, τότε: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Αν $\tau \in S_n$, τότε: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$

Το ουδέτερο στοιχείο της S_n είναι: $i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \sigma^{-1} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = i$

πχ: στην S_4 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Έστω $\sigma \in S_n$. Ορίσουμε μια σχέση " $\sim_\sigma$ " στο σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$ ως εξής: $\forall i, j = 1, 2, \dots, n : i \sim_\sigma j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \sigma^n(i) = j$

$$\sigma^n(i) = j$$

Ισχυρισμός: $\forall \sigma \in S_n$ Η σχέση " $\sim_\sigma$ " είναι σχέση ισοδυναμίας.

i) $\forall i = 1, 2, \dots, n : i \sim_\sigma i$, διότι: $\sigma^0(i) = 1(i) = i$

ii) Αν $i, j = 1, 2, \dots, n : i \sim_\sigma j$, τότε $\exists n \in \mathbb{Z} : \sigma^n(i) = j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma^{-n}(j) = i \Rightarrow j \sim_\sigma i$$

iii) Αν $i, j, k = 1, 2, \dots, n : i \sim_\sigma j \left(\begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{Z} : \sigma^n(i) = j \\ j \sim_\sigma k \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \exists m \in \mathbb{Z} : \sigma^m(j) = k \end{array} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma^{n+m}(i) = \sigma^m(j) = k \Rightarrow i \sim_\sigma k$$

Άρα, πράγματι η " $\sim_\sigma$ " είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\{1, 2, \dots, n\}$

Έστω $a \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε η κλάση ισοδυναμίας του a μέσω της σ , θα είναι:

$$\begin{aligned} [a]_\sigma &= \{x \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x \sim_\sigma a\} = \{x \in \{1, 2, \dots, n\} \mid a \sim_\sigma x\} = \\ &= \{x \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \exists n \in \mathbb{Z} : x = \sigma^n(a), \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{\sigma^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Τότε, $[a]_\sigma = \{\sigma^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ καλείται τροχιά του a μέσω του σ .

Παράδειγμα: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$

• $[1]_\sigma = \{\sigma^n(1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $\sigma(1)=3, \sigma^2(1)=\sigma(3)=6$
 $\sigma^3(1)=\sigma(6)=1$
 $=\{1, 3, 6\} = [3]_\sigma = [6]_\sigma$ $\sigma^{-1}(1)=6, \sigma^{-2}(1)=3, \sigma^{-3}(1)=1$

• $[2]_\sigma = \{\sigma^n(2) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{2, 8\} = [8]_\sigma$

• $[4]_\sigma = \{\sigma^n(4) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{4, 7, 5\} = [7]_\sigma = [5]_\sigma$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = [1]_\sigma \cup [2]_\sigma \cup [4]_\sigma$

Αν $\sigma \in S_n$ και $a \in \{1, 2, \dots, n\}$

Έστω η τροχιά $[a]_\sigma = \{\sigma^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$|[a]_\sigma| \leq n \Rightarrow$ Τα στοιχεία $\sigma^n(a), n \in \mathbb{Z}$ δε μπορούν να είναι όλα διαφορετικά.

Αρα $\exists k, l \in \mathbb{Z} : k \neq l$ και $\sigma^k(a) = \sigma^l(a)$. Έστω $k > l$
 (αν $k < l$, εργαζόμαστε ανάλογα)

$\Rightarrow \sigma^{k-l}(a) = a$ και $k-l \geq 1$. Αρα, $\exists m \in \mathbb{N} : \sigma^m(a) = a$

Έστω $r = \min \{m \in \mathbb{N} \mid \sigma^m(a) = a\}$

Ισχυρισμός: $[a]_\sigma = \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)\}$

Προφανώς: $\{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)\} \subseteq [a]_\sigma$

Έστω $x \in [a]_\sigma \Rightarrow x = \sigma^k(a)$, για κάποιο ακέραιο k .

Από την Ευκλείδεια Διαίρεση του του k , με το r , θα έχουμε: $k = qr + \lambda$, όπου $0 \leq \lambda < r-1$

$$\text{Τότε } x = \sigma^k(a) = \sigma^{qr+\lambda}(a) = \sigma^\lambda(\sigma^{rq}(a)) =$$

$$= \sigma^\lambda(a \in \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)\}) \text{ διότι } 0 \leq \lambda < r-1$$

Αν $[a]_\sigma = \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)\}$ είναι η τροχιά του a μέσω της σ .

→ Αυτή του ορίζει μια νέα σειράθεση σε η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_a(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{αν } x \in [a]_\sigma \\ x, & \text{αν } x \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus [a]_\sigma \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$$

$$\cdot [1]_\sigma = [3]_\sigma = [6]_\sigma = \{1, 3, 6\} \rightarrow \sigma_1: \sigma_1(1)=3, \sigma_1(3)=6, \sigma_1(6)=1$$

$$\cdot [2]_\sigma = [8]_\sigma = \{2, 8\} \rightarrow \sigma_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(i) = i, \quad i = \{1, \dots, 8\} \setminus \{1, 3, 6\} \end{array} \right.$$

$$\cdot [4]_\sigma = [5]_\sigma = [7]_\sigma = \{4, 5, 7\} \rightarrow \sigma_4$$

$$\sigma_2: \sigma_2(2) = 8, \sigma_2(8) = 2, \sigma_2(i) = i, \forall i = \{1, \dots, 8\} \setminus \{2, 8\}$$

$$\sigma_4: \sigma_4(4) = 7, \sigma_4(5) = 4, \sigma_4(7) = 5, \sigma_4(i) = i, \forall i = \{1, \dots, 8\} \setminus \{4, 5, 7\}$$

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_4$$

• Ορισμός: Μια μετάθεση σ στην S_n θα καλείται κύκλος αν-ν υπάρχει το πολύ μια τροχιά στοιχείων του $\{1, 2, \dots, n\}$ μέσω της σ με παραπάνω από 1 στοιχεία.

Το μήκος του κύκλου σ ορίζεται να είναι το πλήθος των στοιχείων της τροχιάς με το λιγότερο πλήθος στοιχείων και συμβολίζεται με $l(\sigma)$.

Παράδειγμα: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

$$[1]\sigma = \{1, 2, \dots, 8\}: \text{κύκλος με } l(\sigma) = 8$$

$$\textcircled{2} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$[1]\tau = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \text{κύκλος μήκους } l(\tau) = 4$$

$$[5]\tau = \{5\}, [6]\tau = \{6\}, [7]\tau = \{7\}, [8]\tau = \{8\}$$

$$\textcircled{3} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$[1]\rho = \{1, 2\}$ Η μετατόπιση ρ δεν είναι κύκλος!

$$[3]\rho = \{3, 4\}$$

$$[5]\rho = \{5\}, [6]\rho = \{6\}, [7]\rho = \{7\}, [8]\rho = \{8\}$$

Αν σ : κύκλος μήκους k στην S_n , τότε:

$$[a]\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

Τότε: $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \sigma(j) = j$

Τότε θα γράφαμε $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$

Παράδειγμα: $\textcircled{1} \sigma = (1\ 3) \in S_5$, τότε:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 12 & 11 & 2 \end{pmatrix} \in S_{12}$$

$[2]\sigma = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \rightarrow$ τροχιά με 6 στοιχεία

$$[i]\sigma = \{i\} \quad \forall i = 3, 5, 7, 9, 11$$

Συνεπώς η σ είναι κύκλος, μήκους 6

Ορισμός: Κάθε κύκλος μήκους 2 στην S_n , καλείται
αντιμετάθεση.

Έτσι μια αντιμετάθεση είναι της μορφής

$$(i\ j), \text{ όπου } 1 \leq i \neq j \leq n \quad (i\ j) = \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k, \forall k \neq i, j \end{cases}$$

Ορισμός: Δύο κύκλοι $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ καλούνται
 $\tau = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ ξένοι

$$\text{αν-ν} \quad \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$$

Παράδειγμα: Αν στην S_5 θεωρήσουμε τους κύκλους
 $\sigma = (1\ 4)$ τότε οι σ, τ είναι ξένοι!
 $\tau = (2\ 3\ 5)$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } \sigma \cdot \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \tau \cdot \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma \cdot \tau \\ \tau \cdot \sigma \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Άρα, οι ξένοι} \\ \text{κύκλοι } \sigma, \tau \\ \text{πείντιθονται} \end{array}$$